Digitale Bibliothek Braunschweig

Ein Holditch-Satz für Flächenstücke im R3

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 39, 1987,
S.37-42

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052927

Digitale Bibliothek Braunschweig

Ein Holditch-Satz für Flächenstücke im R_3

Von **Hans Robert Müller,** Braunschweig

(Eingegangen am 10. 4. 1987)

Der klassische Satz von *Holditch* [1] läßt sich derart auf Flächenhauben im R_3 ausdehnen, daß er bei Einführung einer geeigneten Metrik für die Normalprojektion auf eine beliebige Ebene des Raumes gilt.

I.

Eingangs sei auf folgenden Sachverhalt aus der Differentialgeometrie der Flächen im R_3 hingewiesen: X sei ein Punkt eines auf die Parameter u,v bezogenen Flächenstückes ψ im euklidischen Raum R_3. Unter Verwendung eines rechtshändigen, orthonormierten Dreibeins $\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ gelte die Darstellung

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3 .$$

Im Parameterraum (u,v-Ebene) entspreche ψ einem Bereich Γ vom Zusammenhang eines Kreises, für die Funktionen $x_i(u,v)$ seien die üblichen Differenzierbarkeits- und Stetigkeitsvoraussetzungen getroffen. – Für das mit einem Vorzeichen versehene Flächenelement $dF = W\,du \wedge dv$ gilt dann bei der durch „$\wedge$“ angedeuteten alternierenden Produktbildung

$$g_{11} = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle, \quad g_{12} = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle, \quad g_{22} = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle$$
$$W^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 .$$

Die Bildung von Skalarprodukten werde durch „$\langle\ \rangle$“ angezeigt, während, wie üblich, „$\times$“ für das Vektorprodukt steht.
Die Flächennormale im Punkte X wird durch den Einheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{1}{W} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)$$

erfaßt.

Als *vektorielles Flächenelement* werde

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}\, d\vec{x} \mathbin{\hat{\times}} d\vec{x} = \vec{n}\, dF \tag{1}$$

eingeführt. Integration über den Bereich Γ liefere den *Flächenvektor* von ψ

$$\vec{F} = \iint_{\Gamma} d\vec{F} . \tag{2}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052927

Digitale Bibliothek Braunschweig

Die Bedeutung dieser beiden Vektoren erkennt man durch Bildung des Skalarproduktes mit einem beliebigen Einheitsvektor $\vec{e}$:

$$\langle \vec{e}, d\vec{F} \rangle = \langle \vec{e}, \vec{n} \rangle \; dF = dF^n \tag{3}$$

gibt das Flächenelement der Projektion in Richtung $\vec{e}$ auf eine zu $\vec{e}$ senkrechte Ebene ε an.
Man sieht dies sofort ein, wenn man etwa annimmt, daß ε durch 0 geht und $\vec{e} = \vec{e}_3$ gewählt wird. Dann stellt nämlich

$$\vec{x}^n = \vec{x} - \langle \vec{e}, \vec{x} \rangle \, \vec{e}$$

den Normalriß X^n von X auf die x_1, x_2-Ebene dar und gilt

$$d\vec{F}^n = \frac{1}{2} \, d\vec{x}^n \mathbin{\hat{\times}} d\vec{x}^n = \vec{e} \; dx_1 \wedge dx_2 = \vec{e} \; dF^n. \tag{4}$$

Entsprechendes gilt für den Flächeninhalt F^n der Normalprojektion ψ^n von ψ auf ε:

$$\langle \vec{e}, \vec{F} \rangle = \langle \vec{e}, \iint_{\Gamma} d\vec{F} \rangle = F^n. \tag{5}$$

Es sei bemerkt, daß es sich hierbei stets um orientierte Flächeninhalte handelt und für geschlossene Flächen ψ sowohl $\vec{F}$, wie auch F^n verschwinden.

II.

Nun wollen wir von einem 3-parametrigen Bewegungsvorgang B_3 ausgehen, der der durch ein rechtshändiges, ortho-normiertes Dreibein $\{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ erfaßte bewegliche Raum R_3 (Gangraum) gegenüber dem fest gedachten Raum R_3' (Rastraum) beschreibt. Dieser werde ebenfalls durch ein gleichartiges Dreibein $\{0'; \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ repräsentiert.
Der reine Drehanteil von B_3 wird durch ein schief-symmetrisches System von Ableitungsgleichungen

$$d\vec{e}_i = \omega_j \, \vec{e}_k - \omega_k \, \vec{e}_j \quad (i,j,k = 1,2,3 \text{ zyklisch}) \tag{6}$$

mit den Integrierbarkeitsbedingungen

$$d\omega_i = \omega_j \wedge \omega_k \tag{7}$$

geregelt. Zum Schiebanteil von B_3 gehört der Vektor

$$d\,\overrightarrow{0'0} = \vec{\sigma}' = \vec{e}_1 \sigma_1 + \vec{e}_2 \sigma_2 + \vec{e}_3 \sigma_3 \tag{8}$$

mit den Integrierbarkeitsbedingungen

$$d\,\sigma_i = \sigma_j \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge \omega_j. \tag{9}$$

Im Sinne von *E. Cartan* werden durch „$\wedge$“ die alternierende Produktbildung und durch „d“ die äußere Ableitung angedeutet. Die Größen ω_i und σ_i sind lineare Differentialformen (*Pfaff*sche Formen) in drei Veränderlichen t_1, t_2, t_3.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052927

Digitale Bibliothek Braunschweig

Dem B_3 liege im Parameterraum (Raum der t_i) ein Gebiet G vom Zusammenhang einer Kugel zugrunde, das von einer geschlossenen, orientierbaren Fläche ∂G berandet werde. Diesem Rand ∂G entspricht dann ein geschlossener 2-gliedriger (flächenläufiger) Bewegungsvorgang B_2 (vgl. [2],[3]). Punkte des Gangraums R_3 beschreiben bei B_2 geschlossene Bahnflächen im Rastraum R_3'. Ist X ein solcher Punkt, dann wird er bei festen x_i in R_3 durch

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3$$

und in R_3' durch

$$\overrightarrow{O'X} = \vec{x}\,' = \overrightarrow{0'0} + \overrightarrow{OX}$$

erfaßt. Für seine Änderung gegenüber R_3' ergibt sich somit wegen (6), (8)

$$d\,\vec{x}\,' = \vec{e}_1 \tau_1 + \vec{e}_2 \tau_2 + \vec{e}_3 \tau_3 \tag{10}$$

mit

$$\tau_i = \sigma_i + x_j \omega_k - x_k \omega_j. \tag{11}$$

Das Volumselement (Raumelement) dJ_X des Punktes X bei B_3 ist

$$dJ_X = \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3. \tag{12}$$

Dieser Ausdruck ist quadratisch in den x_i, da sich die kubischen Terme wegheben. Im besonderen ist

$$dJ_0 = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \tag{13}$$

das Raumelement des Ursprungs 0. Durch Wahl eines geeigneten Gangkreuzes läßt sich (12) auf die Normalform

$$dJ_X = dJ_0 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 \tag{14}$$

bringen, wobei wir uns auf den Fall beschränken wollen, daß die in x_i linearen und gemischt-quadratischen Terme zum Verschwinden gebracht werden können (Hauptachsentransformation einer Mittelpunktsquadrik). Dann gilt für zyklische Anordnungen von $i,j,k = 1,2,3$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k \wedge \sigma_i \wedge \omega_i + \sigma_k \wedge \sigma_j \wedge \omega_j &= 0 \\ \sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k - \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k &= 0 \\ \alpha_i = \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k. & \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Der Ansatz

$$\sigma_i = s_{i1}\omega_1 + s_{i2}\omega_2 + s_{i3}\omega_3$$

führt mit (15) zu

$$s_{ij} + s_{ji} = 0, \quad s_{ii} s_{jk} = 0,$$

woraus wir für $dJ_0 \neq 0$, d.h. $s_{ii} \neq 0$ nun $s_{ij} = 0$ folgern.

Schreiben wir kurz $s_{ii} = s_i$, so gelangen wir zu

$$\sigma_i = s_i \omega_i, \quad \alpha_i = s_i \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3. \tag{16}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052927

Digitale Bibliothek Braunschweig

Hierbei wurde natürlich stets die lineare Unabhängigkeit der ω_i, d.h. $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$ vorausgesetzt.

(14) gewinnt somit die Gestalt

$$dJ_X = [s_1 s_2 s_3 + s_1 x_1^2 + s_2 x_2^2 + s_3 x_3^2]\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3. \tag{17}$$

Wie schon erwähnt, entspricht dem Rande ∂G des zugrunde gelegten Gebietes G im Parameterraum ein geschlossener, flächenläufiger Bewegungsvorgang B_2, bei dem jeder Punkt $X \in R_3$ eine geschlossene Bahnfläche Φ_X beschreibt. Nun betrachten wir einen Teilbereich $\Gamma \subset \partial G$, ebenfalls vom Zusammenhang eines Kreises. Zu ihm gehört ein Flächenstück $\Psi_X \subset \Phi_X$. Für die Flächenhaube Ψ_X wollen wir nun das vektorielle Flächenelement und den zugehörigen Flächenvektor berechnen:

$$d\vec{F}'_X = \frac{1}{2}\, d\vec{x}' \,\hat{\times}\, d\vec{x}' = \vec{e}_1 \tau_2 \wedge \tau_3 + \vec{e}_2 \tau_3 \wedge \tau_1 + \vec{e}_3 \tau_1 \wedge \tau_2, \tag{18}$$

$$\vec{F}'_X = \iint_\Gamma d\vec{F}'_X = \sum \vec{e}_i \iint_\Gamma \tau_j \wedge \tau_k = \sum \vec{e}_i f_i. \tag{19}$$

Die nähere Ausführung liefert

$$\tau_i \wedge \tau_j = (s_i s_j + x_k^2)\, \omega_i \wedge \omega_j + (x_k x_i - s_j x_j)\, \omega_j \wedge \omega_k + (s_i x_i + x_j x_k)\, \omega_k \wedge \omega_i. \tag{20}$$

Mit den Abkürzungen für die Integrale

$$\begin{aligned} &\iint_\Gamma \omega_i \wedge \omega_j = 2\, a_{ij}, \quad \iint_\Gamma s_i \omega_i \wedge \omega_j = 2\, b_{ij}, \\ &\iint_\Gamma s_j \omega_i \wedge \omega_j = 2\, c_{ij}, \iint_\Gamma s_i s_j \omega_i \wedge \omega_j = h_{ij} \end{aligned} \tag{21}$$

finden wir

$$f_i = f_i(X,X) = h_{jk} + 2\, c_{ij} x_j - 2\, b_{ki} x_k + 2\, x_i \,\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle. \tag{22}$$

Nach Einführung des Vektors

$$\vec{a} = \vec{e}_1 a_{23} + \vec{e}_2 a_{31} + \vec{e}_3 a_{12} \tag{23}$$

läßt sich in (22)

$$a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3 = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$$

als Skalarprodukt schreiben.

Denken wir uns im Parameterraum von einem „Teilbereich" Γ ausgegangen und diesen zu einem Randbereich ∂G eines Gebietes G ergänzt, so können wir den zugehörigen Bewegungsvorgang B_3 und die Normalform (17) des Volumselementes zugrunde legen, also auch das zugehörige ausgezeichnete Koordinatensystem in R_3 wählen.

III.

Auf der Verbindungsgeraden zweier Punkte X,Y des Gangraums R_3 sei Z ein weiterer, beliebig gewählter Punkt mit

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052927

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i, \ \lambda + \mu = 1.$$

Damit ergibt sich

$$f_i(Z,Z) = \lambda^2 f_i(X,X) + 2\lambda\mu f_i(X,Y) + \mu^2 f_i(Y,Y),$$

wobei

$$f_i(X,Y) = h_{jk} + c_{ij}(x_j + y_j) - b_{ki}(x_k + y_k) + x_i \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle + y_i \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$$

die Polarform von $f_i(X,X)$ ist. Gemäß (19) ist nun

$$\vec{F}_Z = \lambda^2 \vec{F}_X + 2\lambda\mu \vec{F}_{XY} + \mu^2 \vec{F}_Y$$

mit

$$\vec{F}_{XY} = \sum \vec{e}_i f_i(X,Y)$$

als gemischtem Flächenvektor.

Wegen der Identität

$$\vec{F}_X - 2\vec{F}_{XY} + \vec{F}_Y = 2 \langle \vec{a}, \vec{x} - \vec{y} \rangle \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{M} \tag{24}$$

führt die Elimination von $\vec{F}_{XY}$ zur Darstellung

$$\vec{F}_Z = \lambda \vec{F}_X + \mu \vec{F}_Y - \lambda\mu \vec{M}. \tag{25}$$

Die *Holditch*-Annahme, nämlich der Punkt $Y \in R_3$ beschreibe bei dem flächenläufigen Bewegungsvorgang das gleiche Flächenstück Ψ_X, wie der Ausgangspunkt X, führt zu $\vec{F}_X = \vec{F}_Y$ und damit zu

$$\vec{F}_Z = \vec{F}_X - \lambda\mu \vec{M}. \tag{26}$$

Die Strecke XY wird also so bewegt, daß die beiden Endpunkte auf der Flächenhaube Ψ_X wandern, wobei Z ein Flächenstück Ψ_Z beschreibt.

Für eine Projektionsrichtung $\vec{e}$ gilt

$$\langle \vec{e}, \vec{F}_Z \rangle = \langle \vec{e}, \vec{F}_X \rangle - \lambda\mu \langle \vec{e}, \vec{M} \rangle. \tag{27}$$

In Verbindung mit dem Vektor $\vec{e}$ legen wir nun durch den flächenläufigen Bewegungsvorgang B_2 eine Maßbestimmung im R_3 durch die folgende Erklärung fest: Zwei Punkte $X, Y \in R_3$ mögen den orientierten Abstand $D(X,Y) = -D(Y,X)$ besitzen, wenn in

$$D^2(X,Y) = \varepsilon \cdot \langle \vec{e}, \vec{M} \rangle = 2\varepsilon \cdot \langle \vec{a}, \vec{x} - \vec{y} \rangle \cdot \langle \vec{e}, \vec{x} - \vec{y} \rangle \tag{28}$$

$\varepsilon = \pm 1$ so gewählt wird, daß $D(X,Y)$ reell ausfällt. (28) läßt erkennen, daß das absolute Gebilde dieser pseudo-euklidischen Maßbestimmung in zwei Linearfaktoren, d.h. in zwei Ebenen im Gangraum zerfällt. Werden die Abstände des Punktes Z von den Punkten X, Y in dieser Metrik gemessen, so lassen sich wegen

$$D(X,Z) + D(Z,Y) = D(X,Y)$$

die Parameter λ, μ durch

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052927

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\lambda = \frac{D(Z,Y)}{D(X,Y)}, \mu = \frac{D(X,Z)}{D(X,Y)} \tag{29}$$

ausdrücken. (27) nimmt nun die Form an

$$\langle \vec{e}, \vec{F}_X \rangle - \langle \vec{e}, \vec{F}_Z \rangle = \varepsilon \cdot D(X,Z) \cdot D(Z,Y)$$

oder wegen (5)

$$F_X^n - F_Z^n = \varepsilon \cdot D(X,Z) \cdot D(Z,Y), \tag{30}$$

eine Formel, die der klassischen Formel von *H. Holditch* entspricht[1]).

Somit gilt der

Satz: *Bei einem flächenläufigen Bewegungsvorgang werde eine Strecke fester Länge so bewegt, daß ihre Endpunkte* X,Y *stets auf einem Flächenstück* $\Psi_X = \Psi_Y$ *verbleiben. Ein Punkt* Z *der Geraden* XY *beschreibe hierbei ein Flächenstück* Ψ_Z. *Der Normalriß beider Flächenstücke in einer beliebigen Projektionsrichtung führt zu zwei ebenen Bildbereichen. Die Differenz ihrer Flächeninhalte hängt nur von den Abmessungen der bewegten Figur ab. Hierbei hat die Längenmessung im Sinne einer Maßbestimmung zu erfolgen, die durch den Bewegungsvorgang und die Projektionsrichtung bestimmt wird.*

Eine Verallgemeinerung der Formel (30) für den Fall, daß sich die Punkte X,Y der bewegten Strecke auf je einem Flächenstück Ψ_X bzw. Ψ_Y bewegen, läßt sich aus (25) ohne Schwierigkeiten folgern.

Literaturverzeichnis

[1] *Hamnet Holditch,* Geometrical theorem, The quaterly Journal of pure ans applied Mathematics *2* (1858), 38.
Der Beweis des Satzes wurde unter dem Decknamen *„Petrarch"* (vermutlich *H. Holditch*) in *„Lady's and Gentleman's Diary for the year of our Lord* 1857" als Preisfrage gestellt. 1858 wurden dort vier Lösungen (z.T. Verallgemeinerungen) verschiedener Autoren veröffentlicht, weitere Lösungen seien noch eingegangen. Eine Verallgemeinerung von *W. S. B. Woolhouse* wurde nachgetragen (Datum des Manuskripts 1856).

[2] *H. R. Müller,* Räumliche Gegenstücke zum Satz von Holditch, Abhandl. Braunschw. Wiss. Ges. *30* (1979), 107–113.

[3] *H. R. Müller,* Erweiterung des Satzes von Holditch für geschlossene Raumkurven. Abhandl. Braunschw. Wiss. Ges. *31* (1980), 129–135.

[1]) Der klassische Satz von *Holditch* besagt: Werden die Endpunkte X,Y einer Strecke fester Länge einmal auf einer Eilinie herumgeführt, so beschreibt ein Punkt Z der Geraden XY mit $\overline{XZ} = b$, $\overline{ZY} = a$ eine geschlossene, nicht notwendig wieder konvexe Kurve. Der Inhalt des von den beiden Kurven berandeten Bereichs ist $a \cdot b \cdot \pi$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052927